Modulationsverfahren Teil 4

In diesem Teil der Artikelserie setzen wir die Erläuterungen zu den Winkelmodulationsverfahren fort und geben einen Einblick in die mathematische Betrachtungsweise zur Phasen- und Frequenzmodulation.

Allgemeines

Die Winkelmodulation beschreibt diejenigen Modulationsverfahren, die das Argument einer Winkelfunktion beeinflussen. Im Teil 3 dieser Artikelserie („ELVjournal" 1/99) haben wir erläutert, wie durch die Variation der Frequenz bzw. der Phase eines sinusförmigen Signals bei konstanter Amplitude die Frequenz- bzw. Phasenmodulation entsteht. Die plausiblen Erklärungen des vorangegangenen Artikels werden wir im Folgenden durch die mathematische Beschreibung von der theoretischen Seite beleuchten. Dabei ist die recht komplizierte Materie soweit vereinfacht, daß der interessierte Leser die einzelnen Schritte zur Entwicklung der Funktionsgleichungen leicht nachvollziehen kann.

Mathematische Betrachtung

Die nun folgende mathematische Betrachtung der Winkelmodulationsverfahren wird den schon beschriebenen engen Zusammenhang zwischen Frequenz- und Phasenmodulation aufzeigen und auch das Zustandekommen des in Abbildung 14 („ELVjournal" 1/99) dargestellten Frequenzspektrums erklären.

Das unmodulierte sinusförmige Trägersignal $m_0(t)$ mit der Amplitude 1, der Trägerfrequenz f_0 und des Nullphasenwinkels φ_0 dient als Ausgangspunkt und läßt sich mit Hilfe der folgenden Gleichung beschreiben:

$$m_0(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0) \qquad \text{(Gl.28)}$$

Bei einer Winkelmodulation, Phasen- oder Frequenzmodulation, wird nun das Argument der Winkelfunktion

$$\Psi(t) = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0 \qquad \text{(Gl. 29)},$$

das den zeitlichen Verlauf des Signals beschreibt, im Sinne eines niederfrequenten Quellensignals verändert. Dieses modulierende Signal, das bei einer FM-Rundfunkübertragung das NF-Audiosignal darstellt, wird im Folgenden ganz allgemein mit s(t) bezeichnet. Durch die Beeinflussung des unmodulierten Signals $m_0(t)$ im Sinne des NF-Signales s(t) entsteht das modulierte Signal m(t). Ganz allgemein kann man für die Funktionsgleichung einer Winkelmodulation schreiben:

$$m(t) = \cos\left[\Psi(f(t))\right] \qquad \text{(Gl. 30)}$$

Die obigen Erläuterungen sind soweit verallgemeinert, daß sie für beide Modulationsverfahren gelten. Für die weitere Betrachtung ist es aber erforderlich, die Phasen- und Frequenzmodulation getrennt zu behandeln.

Phasenmodulation

Bei der Phasenmodulation (PM) wird die Nullphasenlage des Trägersignals im Sinne des NF-Signals verändert. Zur Beschreibung wird die Funktionsgleichung des unmodulierten Trägers Gl. 28 herangezogen. In dieser Gleichung wird nun die Nullphasenlage φ_0 durch das NF-Signal beeinflußt, d. h. φ_0 wird eine Funktion in Abhängigkeit vom NF-Signal. Zur mathematischen Ausführung der PM ist im Argument der Winkelfunktion (Gl. 29) des unmodulierten Trägers nur die eigentlich konstante Nullphasenlage φ_0 durch die Funktionsgleichung des Quellensignals zu ersetzen:

$$\Psi_{PM}(t) = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + k \cdot s(t) \qquad \text{(Gl. 31)}$$

Der Wert k stellt dabei nur eine Modulationskonstante dar. Wird diese Argumentfunktion der Phasenmodulation $\Psi_{PM}(t)$ in die allgemeine Funktionsgleichung Gl. 30 eingesetzt, so ergibt sich folgende allgemeine mathematische Definition der Phasenmodulation:

$$m_{PM}(t) = \cos\left[2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + k \cdot s(t)\right] \qquad \text{(Gl. 32)}$$

Da zwischen dem Modulationssignal $m_{PM}(t)$ und dem modulierenden Signal s(t) ein nichtlinearer Zusammenhang besteht, gehören die Winkelmodulationsverfahren, d. h. sowohl die Phasenmodulation als auch die Frequenzmodulation, zu den nichtlinearen Modulationsverfahren. Im Vergleich dazu wird die Amplitudenmodulation, aufgrund der linearen Verknüpfung zwischen den Signalen, zu den linearen Systemen gezählt.

Aus oben gezeigter allgemeiner Gleichung (Gl. 32) lassen sich leider weder der zeitliche Verlauf noch die spektrale Verteilung auf einfache Art ablesen. Ein besseres Verständnis ergibt sich durch die Einführung eines konkreten modulierenden Signals (Quellensignal). Daher geht man zu einer sogenannten Eintonmodulation über, bei der das modulierende Signal eine einfache Cosinus-Funktion ist:

$$s(t) = a \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) \qquad \text{(Gl. 33).}$$

Durch Einsetzen dieser Formel für ein allgemeines NF-Signal mit der Amplitude a und der Frequenz f_1 in die allgemeine Gleichung Gl. 32 erhält man für das phasenmodulierte Signal folgende Funktionsgleichung:

$$m_{PM}(t) = \cos\left[2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + k \cdot a \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t)\right] \qquad \text{(Gl. 34)}$$

Hieraus ist der nichlineare Zusammenhang noch besser zu erkennen. Daß diese Gleichung ein phasenmoduliertes Signal ergibt, läßt sich in Abbildung 15 („ELVjournal" 1/99) erkennen. Das dort dargestellte Modulationssignal $m_{PM}(t)$ wurde mit Hilfe einer entsprechenden Software aus obiger Gleichung berechnet. Um nun aus obiger Gleichung auch das Frequenzspektrum bestimmen zu können, sind noch einige Umformungen notwendig, die im Anschluß an die nun folgende mathematische Betrachtung der Frequenzmodulation beschrieben werden.

Frequenzmodulation

Die Frequenzmodulation (FM) wird durch die Variation der Frequenz des Trägersignals erreicht. Zur mathematischen Betrachtung wird zunächst wieder die allgemeine Gleichung des unmodulierten Trägersignals Gl. 28 herangezogen. Da die Nullphasenlage φ_0 bei diesem Modulationsverfahren keine Bedeutung hat, läßt sich dieser Parameter zu Null setzen und das Argument der Cosinus-Funktion vereinfacht sich zu:

$$\Psi(t) = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t \qquad \text{(Gl. 35)}$$

Der bei der FM zu beeinflussende Parameter im Argument ist die Frequenz f_0. In der mathematischen Betrachtung wird die sonst konstante Frequenz f_0 im Sinne des modulierenden Signals s(t) verändert, d. h. es tritt zu jedem Zeitpunkt eine „neue" Frequenz $f_i(t)$ auf, deren Abweichung von der Trägerfrequenz f_0 vom NF-Signal abhängt. Der in diesem Zusammenhang eingeführte Begriff der Augenblicksfrequenz $f_i(t)$ gibt die für jeden Augenblick neu zu bestimmende Frequenz an. Mathematisch betrachtet ist dies eine einfache Addition der Trägerfrequenz f_0 mit dem mit der

Modulationskonstanten k gewichteten NF-Signal s(t). Es gilt somit:

$$f_i(t) = f_0 + k \cdot s(t) \qquad \text{(Gl. 36).}$$

Zur Berechnung der Funktionsgleichung muß nun zunächst die Argumentfunktion $\Psi_{FM}(t)$ bestimmt werden. Den Zusammenhang zwischen Argument und Augenblicksfrequenz gibt folgende Gleichung an, die wir hier als „Kochrezept” angeben, und aufgrund des hierin vorkommenden integralen Zusammenhanges nicht herleiten:

$$\Psi(t) = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^t f_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(Gl. 37)}$$

Ersetzt man in obiger Gleichung den Ausdruck $f_i(\tau)$ durch die Definition in Gleichung 36 und löst diesen Ausdruck nach den Regeln der Integralrechnung, erhält man letztlich folgende Formel:

$$\Psi_{FM}(t) = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \int_0^t s(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(Gl. 38)}$$

Dieser Term, eingesetzt in die allgemeine Gleichung der Winkelmodulation (Gl. 30), ergibt die mathematische Definitionsgleichung für ein frequenzmoduliertes Signal:

$$m_{FM}(t) = \cos\left[2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \int_0^t s(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \qquad \text{(Gl. 39)}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich das bei der Modulation entstehende Signal nicht mehr auf einfache Weise vorherbestimmen. Interessant ist aber der Vergleich mit der Gleichung der Phasenmodulation (Gl. 32). Dabei fällt auf, daß sich beide Funktionen nur durch das laufende Integral über das modulierenden Signales s(t) unterscheiden. In der Praxis heißt dies, daß sich eine Frequenzmodulation auch mit Hilfe einer Phasenmodulationsschaltung realisieren läßt, wobei das modulierende Signal s(t) vorher mit einem Integrator vorverarbeitet werden muß. Das Ergebnis beider Modulationen ist dann identisch.

Diese enge Verwandtschaft zwischen dem Phasen- und Frequenzmodulationsverfahren wird bei der folgenden FM-Eintonmodulation noch deutlicher. Setzt man die mathematische Definition des NF-Signals aus Gleichung 33 in die allgemeine Formel der FM (Gl. 39) ein, erhält man:

$$m_{FM}(t) = \cos\left[2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \int_0^t a \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot \tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \qquad \text{(Gl. 40)}$$

Genau auf dieser Formel basiert die in Abbildung 13 („ELVjournal” 1/99) dargestellte Frequenzmodulation. Wird das Integral im Argument gelöst, so ergibt sich:

$$m_{FM}(t) = \cos\left[2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{k \cdot a}{f_1} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t)\right] \qquad \text{(Gl. 41)}$$

Vernachlässigt man die Konstante vor der Sinus-Funktion, erkennt man gegenüber der Gleichung der PM (Gl. 34) nur einen Unterschied: Bei der Frequenzmodulation ist aus der ursprünglichen Cosinus-Funktion im modulierenden Signal (lt. Gl. 33) eine Sinus-Funktion im Argument des modulierten Signals $m_{FM}(t)$ geworden. Dieser Unterschied ist in der Integration begründet. Dies bedeutet in der Praxis, daß ein Quellensignal, das integriert und anschließend auf einen Phasenmodulator gegeben wird, das gleiche Modulationsergebnis liefert, wie eine Frequenzmodulation mit dem originalen, d. h. nicht integrierten Quellensignal. Im Umkehrschluß heißt dies, daß bei einem gegebenen winkelmodulierten Signal ohne Kenntnis des Modulationsverfahrens, PM oder FM, kein Rückschluß auf das modulierende Quellensignal möglich ist.

In den hier vorgestellten Beispielen (PM: Gl. 33 und FM: Gl. 41) wird dies besonders deutlich, wenn beide Signale nacheinander im Zeitbereich, z. B. auf einem Oszilloskop, darstellt werden. Da bei dieser Darstellungsart keine Zuordnung des zeitlichen Nullpunktes möglich ist, ist die Zeitverschiebung nicht erkennbar, und die modulierten Signale sind nicht zu unterscheiden.

Frequenzspektrum der Phasen- und Frequenzmodulation

Die Bestimmung der spektralen Verteilung einer Winkelmodulation aus den hergeleiteten Gleichungen für die Phasen- und Frequenzmodulation ist ohne weitere mathematische Umformungen kaum möglich. Die notwendigen Umformungen werden im Folgenden am Beispiel der Frequenzmodulation durchgeführt. Dazu betrachtet man zunächst die Gleichung der FM-Eintonmodulation (Gl. 41) und legt fest:

$$\frac{k \cdot a}{f_1} = \mu_{FM} \qquad \text{(Gl. 42)}$$

Diese Konstante wird als Modulationsindex bezeichnet und ist bereits im vorherigen Artikel beschrieben und mit der Gleichung 25 wie folgt definiert:

$$\mu_{FM} = \frac{\Delta F}{f_1} \qquad \text{(Gl. 43)}$$

Die Einführung dieses Modulationsindexes, der im Prinzip die „Stärke” der Modulation beschreibt, erlaubt es, die Gleichung der Eintonmodulation wie folgt umzuschreiben:

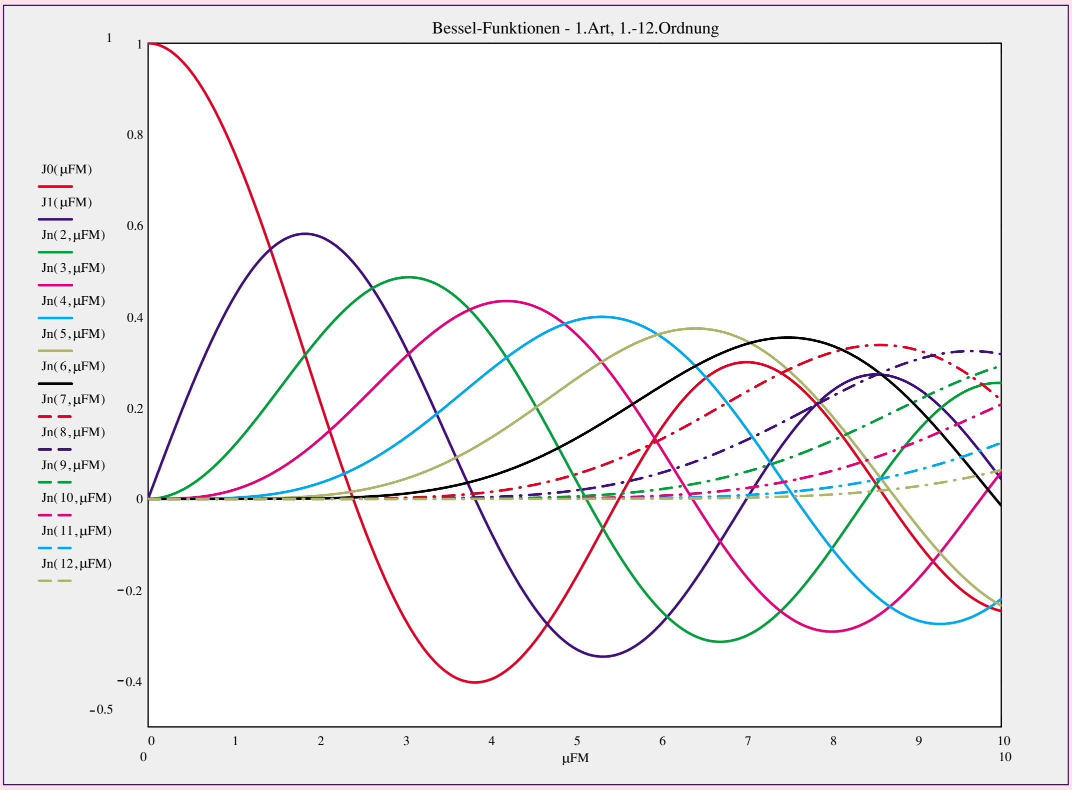

Bild 17: Bessel-Funktionen 1. Art, 1. bis 12. Ordnung

$$m_{FM}(t) = \cos\left[2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t + \mu_{FM}\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f_1\cdot t)\right]$$

(Gl. 44)

Eine solche Gleichung läßt sich nun mittels Bessel-Funktionen in eine unendliche Reihe umschreiben, die dann Aufschluß über das Frequenzspektrum gibt. Es gilt folgendes Theorem:

$$\cos\left[\alpha + x\cdot\sin(\beta)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_n(x)\cdot\cos(\alpha + n\cdot\beta)$$

(Gl. 45)

Hierin sind $J_n(x)$ Bessel-Funktionen 1. Art und n-ter Ordnung. Die Werte können aus Tabellen oder Diagrammen entnommen werden. In Abbildung 17 haben wir der Vollständigkeit halber diese Bessel-Funktionen bis zur 12. Ordnung dargestellt.

Wendet man obiges Theorem auf die Gleichung der FM-Modulation (Gl. 44) an, so ergibt sich der folgende Ausdruck, aus dem sich die spektrale Verteilung ablesen läßt:

$$m_{FM}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_n(\mu_{FM}) \cdot \cos\left[2\cdot\pi\cdot(f_0 + n\cdot f_1)\cdot t\right]$$

(Gl. 46)

Die erste ganz allgemeine Betrachtung der Gleichung ergibt, daß es sich hierbei um eine Summe unendlich vieler verschiedener gewichteter Cosinus-Signale handelt. Um nun aus diesem Ausdruck das Frequenzspektrum bestimmen zu können, ist zunächst das Argument der Cosinus-Funktion zu betrachten: Für $n = 0$ erscheint nur die Frequenz des Trägers f_0. Alle weiteren ganzzahligen Werte für n beschreiben Frequenzen oberhalb und unterhalb des Trägersignals im Abstand $n\cdot f_1$, d. h. alle Werte $n \neq 0$ erzeugen die Seitenbänder. Die Funktionswerte der Besselfunktion $J_n(\mu_{FM})$ sind bei konstantem Modulationsindex feste Zahlenwerte, die nur eine Gewichtung vornehmen und so die Amplitudenverteilung der einzelnen Seitenbandsignale angeben. Sie sind daher nicht so kompliziert in der Anwendung, wie es auf den ersten Blick erscheint.

Da die Summenfunktion aus Gl. 46 von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, ergeben sich bei der Frequenzmodulation Seitenbandsignale, die sich theoretisch über den gesamten Frequenzbereich erstrecken. Aufgrund der mit steigendem n kleiner werdenden Funktionswerte der Besselfunktionen, fällt die Amplitude der zugehörigen Seitenbandsignale schnell ab, so daß diese in der Praxis keine Bedeutung mehr haben. Eine Bandbegrenzung auf die im „ELVjournal" 1/99 bereits beschriebene Carson-Bandbreite wirkt sich daher in der Praxis kaum aus.

Daß sich obige theoretische Erklärungen auch mit der Praxis decken, zeigt Abbildung 18. Dort ist das Spektrum eines FM-Signals dargestellt, das gemäß der Formel Gl. 46 berechnet ist. Die dabei verwendeten Parameter entsprechen denen, die der in Abbildung 14 („ELVjournal" 1/99) dargestellten FM zu Grunde liegen. Ein Vergleich beider Abbildungen zeigt, daß hier Theorie und Praxis gut übereinstimmen.

Aber nicht nur zur Berechnung des Spektrums kann die theoretische Betrachtung herangezogen werden, es lassen sich umgekehrt auch verschiedene Parameter einer Frequenzmodulation aus einem gemessenen Frequenzspektrum bestimmen. Als wichtiger Parameter ist z. B. der Modulationsindex bestimmbar: Werden die Amplituden der Signalanteile im Spektrum bestimmt und zueinander ins Verhältnis gesetzt, so kann über einen Vergleich mit den Amplituden der Besselfunktionen in Abbildung 17 der Modulationsindex bestimmt werden. Besonders einfach ist diese Bestimmung von μ_{FM}, wenn eines der ersten Seitenbandsignale im Spektrum fehlt. Ist z. B., wie in der Abbildung 14 und 18, das 2. Seitenband nur mit sehr kleiner Amplitude vorhanden, so kann auf einen Modulationsindex von $\mu_{FM} \approx 5{,}1$ geschlossen werden, da auch die Besselfunktion 2. Ordnung $J_n(2,\mu_{FM})$ in Abbildung 17 dort einen Nulldurchgang hat.

Um als weiteren Parameter der FM den Frequenzhub ΔF zu bestimmen, muß zunächst die Definitionsgleichung Gl. 43 umgestellt werden. Nach der Bestimmung der Signalfrequenz f_1 aus dem Abstand der einzelnen Seitenbänder läßt sich in diesem Fall ein Frequenzhub von $\Delta F \approx 73{,}3$ kHz berechnen. Beachtet man, daß es sich bei obiger Bestimmung von μ_{FM} aus dem Diagramm (Abb. 17) nur um eine grobe Schätzung handelt, ist es erstaunlich, wie genau die tatsächlichen Modualtionsparameter $\mu_{FM} = 5{,}2$ und $\Delta F = 75$ kHz bestimmbar sind. Somit ist es möglich, mit einfachen Mitteln die sonst schwer meßbaren Parameter einer Frequenzmodulation zu bestimmen.

Nach diesen sehr theoretischen Betrachtungen der Winkelmodulationsverfahren werden wir uns im nächsten Teil dieser Artikelserie wieder einfacheren Beschreibungen verschiedener Modulationsverfahren widmen. ELV

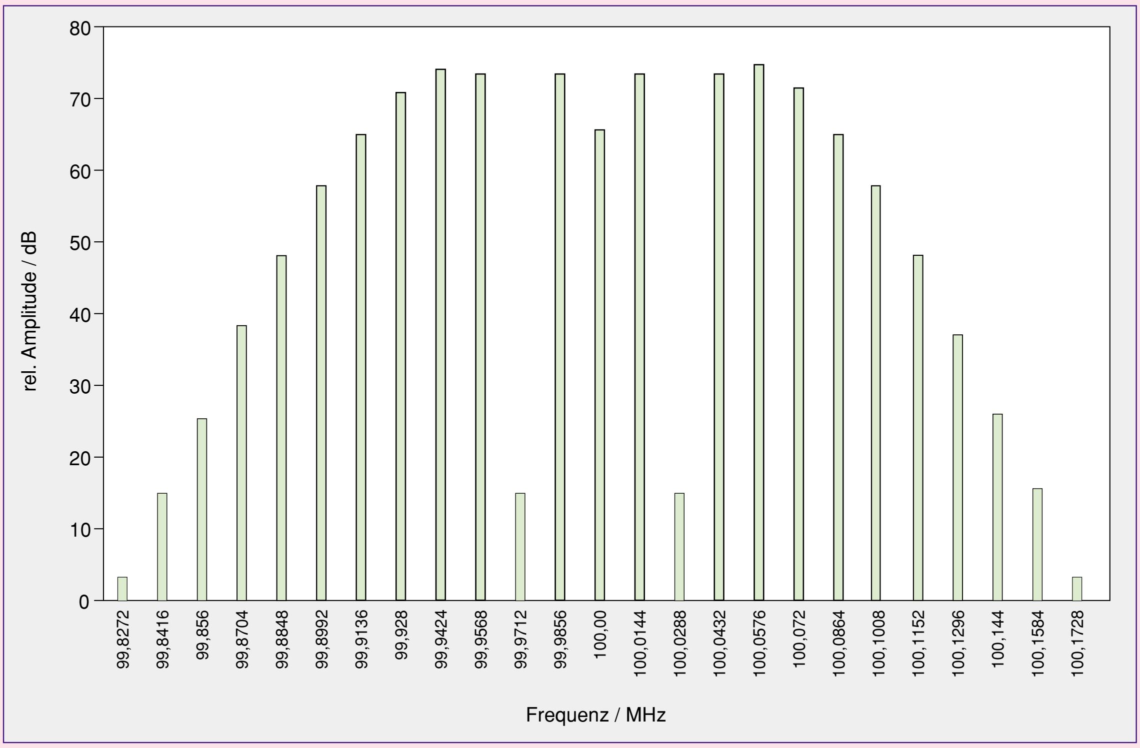

Bild 18: Berechnetes Spektrum einer FM