3.1 Gleichungen – Grundlagen

Ziel Lösungen überprüfen, Definitions- und Grundmenge angeben **AG-R 1.2, AG-R 2.1**

Definition

Eine **Gleichung** ist eine mathematische Aussage in der Form *„linke Seite = rechte Seite"*. Links und rechts vom Gleichheitszeichen stehen Terme (gültige Rechenausdrücke) T_L und T_R: $T_L = T_R$

Grundvorstellung: Ein altes Symbol für Gleichheit ist die zweischalige Balkenwaage: Die Anzeige der Waage, ob gleich oder ungleich, ändert sich nicht, wenn in beiden Schalen gleich viel Masse dazugelegt oder weggenommen wird. Auch wenn die Massen im gleichen Ausmaß vervielfacht oder geteilt (verdoppelt, verdreifacht, halbiert, gedrittelt …) werden, bleibt die Stellung der Waage erhalten.

Eine Gleichung kann **wahr** oder **falsch** sein. Sie bleibt wahr bzw. falsch, wenn beide Seiten um Gleiches vermehrt, vermindert, vervielfacht oder durch Gleiches geteilt werden.

Beispiele: $2 + 2 = 4 \Rightarrow$ wahr $\qquad -3 - 1 = -2 \Rightarrow$ falsch

$x + 3 = 7 \Rightarrow$ nur wahr für $x = 4$ $\qquad y + 1 = y \Rightarrow$ falsch für alle $y \in \mathbb{R}$

Wir sagen:

Die Gleichung $x + 3 = 7$ *gilt* nur für $x = 4$. Die Gleichung $y + 1 = y$ hat keine Lösung.

Oder: $x = 4$ *löst* oder *erfüllt* die Gleichung.

Definition

Eine gesuchte Variable einer Gleichung nennen wir eine **Unbekannte**. Die Werte einer Unbekannten, für die eine Gleichung wahr ist, heißen die **Lösungen** der Gleichung. Die Menge aller Lösungen ist ihre **Lösungsmenge**.

Bemerkungen:
- Für Unbekannte verwenden wir häufig die Buchstaben am Ende des Alphabets: x, y, z
- Mehrere zusammenhängende Gleichungen schreiben wir oft als *Gleichungskette* an. Diese ist genau dann wahr, wenn jede einzelne Gleichung wahr ist.

Beispiele:

Gleichungskette	entsprechende Gleichungen		
$10 = 1 + 9 = 2 + 8$	$10 = 1 + 9$; $1 + 9 = 2 + 8$	$\Rightarrow$	Wahr, weil alle Gleichungen wahr sind.
$2 + 3 = 5 + 8 = 13$	$2 + 3 = 5 + 8$; $5 + 8 = 13$	$\Rightarrow$	Falsch, weil $2 + 3 = 5 + 8$ falsch ist.

Grundmenge und Definitionsmenge

Lehrsätze, Formeln und Definitionen sind oft als Gleichungen formuliert. Dabei muss genau festgelegt sein, was die Variablen bedeuten und in welchem Zusammenhang sie stehen, z. B.

$a^2 + b^2 = c^2$	Der Satz des Pythagoras gilt für rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c.
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Die binomische Formel ist wahr für alle reellen Zahlen a, b.
$\rho = \frac{m}{V}$	Die Dichte ρ ist definiert als der Quotient von Masse m und Volumen V.

Definition

Die **Grundmenge** $\mathbb{G}$ enthält alle Werte der Variablen, die in der entsprechenden Anwendungssituation sinnvoll sind.

Die **Definitionsmenge** $\mathbb{D}$ der Gleichung enthält alle Werte der Variablen, für die die Terme mathematisch sinnvoll sind.

Bemerkungen:
- Achte besonders auf die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ bei Bruch- oder Wurzeltermen.
- Manchmal ist die Grundmenge ein Teil der Definitionsmenge, manchmal ist es umgekehrt.
- Wenn nicht anders angegeben, gilt für die Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.

379 Gib an, ob es sich hier um eine Gleichung handelt. Wenn ja, gib an, ob sie wahr oder falsch ist.

a) $3 + 4 = 13 - 6$ b) $2 + 3 = 6$
c) $(2 + 3) : (8 - 2 \cdot 4) = 5$ d) $-8 - 5 = -3$
e) $6 + 4e = 10$ f) $a = a$
g) $3 : (b - 1) = 3$ h) $3x + 8 = 3x + 2$

380 Gegeben ist die Gleichung $2x + \pi = x + 2\pi$. Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$2x + \pi$ ist ein Term.	☒
π ist Lösung der Gleichung.	☒
$x + 2\pi$ nennt man eine Gleichung.	☐
x ist die Variable.	☒
Für $x = 0$ ist die Gleichung wahr.	☐

381 Gib jene Werte für die Unbekannte an, für die die Gleichung wahr ist.

a) $z + 3z = 12$ b) $4x + 3x = x$
c) $5x - x = 4$ d) $5x - 2x = 3x$
e) $8z + 3z = 10z$ f) $2x + 1 = 2x + 2$

382 Kreuze an, wenn die vorgeschlagene Lösung für die angeschriebene Gleichung richtig ist.

$x - 3 = 7$	Lösung: $x = 4$	☐
$0{,}5r = 6$	Lösung: $r = 3$	☐
$2 \cdot (s - 1) = 8s + 4$	Lösung: $s = -1$	☒
$2t = 3 + 2t$	Lösung: $t = 0$	☐
$\frac{y}{4} = 4y + 12$	Lösung: $y = -4$	☐

383 Ordne jeder Gleichung die passende Lösung (aus A bis F) zu!

$2x + 1 = 7$	
$\frac{2}{x} = 8 \quad (x \neq 0)$	
$-x + 2 = x - 2$	
$-x + 8 = x + 8$	
$x + 1 = x$	
$\frac{x}{3} = \frac{1}{4}$	

A	$x = 0{,}25$
B	$x = 0$
C	$x = 3$
D	$x = 2$
E	$x = 0{,}75$
F	keine Lösung

384 Wenn du $2 + 3 + 8 + 7$ im Kopf addierst, sagst du vielleicht „zwei und drei ist fünf und acht macht dreizehn und sieben gibt zwanzig". Geschrieben sieht das so aus:
$2 + 3 = 5 + 8 = 13 + 7 = 20$
Begründe, warum diese Gleichungskette falsch ist.

385 Sind diese Gleichungsketten wahr? Begründe!

a) $1 + 1 = 2 + 1 = 3 + 2 = 5 + 3 = 8$ falsch weil $1+1 \neq 2+1$
b) $2 + 3 = 9 - 4 = 15 - 10$ wahr →
c) $8 - 2 = 3 + 3 = 6 + 4 = 10$ falsch weil $3+3 \neq 6+4$
d) $x + x = 2x + x = 3x$
e) $(3x + 5)(x - 2) = 3x^2 + 5x - 6x - 10 = 3x^2 - x - 10$

386 Diese Gleichungsketten sind offensichtlich falsch. Wo genau liegt der Fehler?

a) $1\,€ = 100\,c = 10\,c \cdot 10\,c = 0{,}1\,€ \cdot 0{,}1\,€ = 0{,}01\,€ = 1\,c$
b) $1\,m = 100\,cm = 10\,cm \cdot 10\,cm = 0{,}1\,m \cdot 0{,}1\,m = 0{,}01\,m = 1\,cm$
c) $1\,h = 60\,min = 10\,min \cdot 6\,min = \frac{1}{6}\,h \cdot \frac{1}{10}\,h = \frac{1}{60}\,h = 1\,min$

387 Findet selbst ähnliche „Beweise" wie in Aufg. 386, z. B. $1\,kg = 1\,g$ oder $1\,km = 1\,m$.

388 Diskutiert folgendes Wortspiel, das den Unterschied zwischen Gleichung und Gleichungskette behandelt:

$T_1 = T_2 = T_3 = T_4$ Alle Terme sind gleich,
$T_0 = E_R$ nur T_0 ist gleich eR.

389 Ordne jeder Gleichung die passende Definitionsmenge (aus A bis F) zu!

$\frac{3x - 4}{2} = 17$	E
$\frac{3x^2 + 4}{3x} = 4$	C
$\frac{4}{x - 3} = 12$	D
$\frac{12}{x^2 - 9} = \frac{2}{5}$	D
$\frac{7}{2x + 1} = 5$	A
$x - \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{2}{5}$	F

A	$\mathbb{R} \setminus \{-0{,}5\}$
B	$\mathbb{R} \setminus \{3\}$
C	$\mathbb{R}^*$
D	$\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$
E	$\mathbb{R}$
F	$\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

390 Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Für die Gleichung $\frac{4}{x - 3} = \frac{x}{2}$ lautet die Definitionsmenge ______ ① ______, weil ______ ② ______.

①	
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$	☒
$D_f = \mathbb{R}$	☐
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$	☑

②	
für x jede reelle Zahl erlaubt ist	☐
$x - 3 \neq 0$ sein muss	☒
$x - 3 \neq 0$ und $x \neq 0$ sein muss	☑

391 Gib an, in welchem Zusammenhang die Formel gilt und erläutere die Bedeutung der Variablen.

a) $r^2 + s^2 = t^2$ b) $\rho = \frac{m}{V}$ c) $u = 2(a + b)$
d) $A = r^2\pi$ e) $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ f) $v = \frac{s}{t}$

3.2 Äquivalente und lineare Gleichungen

Ziel Äquivalenzumformungen ausführen und lineare Gleichungen erkennen **AG-R 1.2, AG-R 2.2**

Äquivalente Terme ergeben für jeden Wert der Variablen dieselbe Zahl, z. B. $3 \cdot (x - 2) = 3x - 6$
Äquivalente Gleichungen machen gleichwertige Aussagen, z. B.
Die Gleichungen $3x - 6 = 0$ und $3x = 6$ sind verschieden. Sie sagen aber dasselbe über die Unbekannte x aus: Sie sind genau dann wahr, wenn $x = 2$ ist. Wir schreiben:[1] $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6$

Gleichungen heißen **äquivalent**, wenn sie genau die gleichen Lösungen haben.

Löse eine Gleichung, indem du sie schrittweise in äquivalente, immer einfachere Gleichungen umformst. Denk dabei an die Waage: Sie soll im Gleichgewicht bleiben.[2]

Die Lösungen einer Gleichung verändern sich bei **Äquivalenzumformungen** nicht:

1. Seiten vertauschen
$$T_L = T_R$$
$$T_R = T_L$$

2. auf beiden Seiten den gleichen Wert a addieren oder subtrahieren
$$T_L = T_R \,|\, + a \qquad T_L = T_R \quad | - a$$
$$T_L + a = T_R + a \qquad T_L - a = T_R - a$$

3. beide Seiten mit dem gleichen Wert $a \neq 0$ multiplizieren oder durch den gleichen Wert $a \neq 0$ dividieren
$$T_L = T_R \quad | \cdot a \neq 0 \qquad T_L = T_R \quad | : a \neq 0$$
$$a T_L = a T_R \qquad \frac{T_L}{a} = \frac{T_R}{a}$$

Hinweis: Manchmal führen Äquivalenzumformungen auf eine Gleichung, die keine Unbekannte mehr enthält. In diesem Fall liegt ein **Sonderfall** vor, z. B.

$y + 1 = y \Leftrightarrow 1 = 0$ f. A.
Die Gleichung hat keine Lösung.[3]
Lösungsmenge = leere Menge: $L = \varnothing = \{\ \}$

$2x + 4 = 2 \cdot (x + 2) \Leftrightarrow 4 = 4$ w. A.
Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen.
Lösungsmenge = Grundmenge: $L = \mathbb{G}$

Beispiel 392

Löse die Gleichung: $\frac{1}{5}(-3x - 4) + 3(2x + 5) = \frac{99 - x}{5}$

Ausführung: Schreibe die äquivalenten Gleichungen zeilenweise untereinander.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{5}(-3x - 4) + 3(2x + 5) &= \tfrac{99 - x}{5} && | \cdot 5 \\ -3x - 4 + 15(2x + 5) &= 99 - x && \text{linke Seite vereinfachen} \\ 27x + 71 &= 99 - x && | + x - 71 \\ 28x &= 28 && | : 28 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Gib jeweils neben einem senkrechten Strich | die ausgeführte Äquivalenzumformung an.

Hinweis zu 392: Solche Gleichungen und *Bruchgleichungen* (die Unbekannte steht im Nenner des Bruchs) kannst du auch mit einem Computeralgebrasystem (CAS) lösen (S. 84).

Gleichungen, in denen nur Summanden der Art „bekannte Konstante“ und „Konstante mal Unbekannte“ vorkommen, heißen **linear**. Allgemeine Form:

1. $ax = b$ lineare Gleichung in einer Unbekannten x
2. $ax + by = c$ lineare Gleichung in zwei Unbekannten x, y
3. $ax + by + cz = d$ lineare Gleichung in drei Unbekannten x, y, z, usw.

Die *Parameter* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ stehen für Zahlenwerte, die in konkreten Beispielen gegeben sind.

Beispiel 393

Ist die Gleichung $-3x + \frac{y}{2} = 17$ linear? Begründe deine Antwort!

Ausführung: $-3x + \frac{y}{2} = 17$ ist eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten x und y.
Begründung: Die Gleichung hat die Form $ax + by = c$ mit $a = -3$, $b = \frac{1}{2}$ und $c = 17$.

[1] Das Symbol $\Leftrightarrow$ für „ist äquivalent“ kennst du bereits aus Abschnitt 1.10.
[2] Goldene Regel: Was ich einer Seite tu, füg ich auch der andern zu.
[3] Wir sagen auch: Sie ist nicht lösbar.

394 Gegeben ist die Gleichung $2x - 1 = \frac{x}{2} + 4$. Kreuze alle dazu äquivalenten Gleichungen an.

$2x = \frac{x}{2} + 5$	☒
$4x - 2 = x + 4$	☐
$1{,}5x - 1 = 4$	☒
$-2x + 1 = \frac{x}{2} - 4$	☐
$x - \frac{1}{2} = \frac{x}{4} + 2$	☒

395 Führe die gegebenen Umformungen durch.

a) $\frac{2}{3} + x = \frac{1}{3} \quad | \cdot 3$

b) $21x + 14 = 84 - 14x \quad | : 7$

c) $\frac{1}{4}x + \frac{3}{8} = 3\frac{5}{16} \quad | \cdot 16$

396 Vereinfache die Gleichungen mit Äquivalenzumformungen.

a) $20x = 40$ b) $3x + 6 = 3y + 6$

c) $17x + y = 34 + y$ d) $4 + 4x = 8 - 4x$

e) $x^2 + x - 5 = x^2 + 2x$ f) $17 + 7y = 7y + 1$

397 Entscheide, ob die Äquivalenzumformung richtig durchgeführt wurde. Stelle Fehler richtig!

a) $\frac{2}{3} + x = \frac{1}{3} \quad | \cdot 3$

$2 + x = 1$

b) $7 = \frac{3}{x} \quad | : 3$

$x = \frac{7}{3}$

c) $4x = 1 \quad | : 4$

$x = 1$

d) $8 = x \cdot 8 \quad | : 8$

$x = 0$

398 1) Zeige, dass die Gleichung $x^2 + 4x = 0$ die beiden Lösungen $x = 0$ und $x = -4$ besitzt.

2) Erkläre, warum die folgende Umformung nicht zulässig ist:

$x^2 + 4x = 0 \quad | : x$

$x + 4 = 0$

399 Löse die Gleichung:

a) $3x - 8 = 1$ x = 3

b) $7x + 4 = 39$ x = 5 ✓

c) $2x + 2 = 3x - 4$

d) $4x - 7 = 8 + 6x$

e) $\frac{3}{2}x + \frac{9}{4} = \frac{4}{3}x + \frac{31}{12}$ x = 2

f) $\frac{5}{3}x + 2 = \frac{4}{5}x + 15$ x = 15

400 Löse die Gleichung:

a) $6x + 7(7x + 31) = 2(5 - 7x)$

b) $3(-3x - 1) - 10x + 19 = 7(2 - 3x) + 12$

c) $12(2x + 1) - 13 = 8x + 3(5x + 4) - 6$

d) $3(7x + 12) - 5(3x + 4) = 11x - 19$

401 Kreuze die beiden Gleichungen an, die natürliche Zahlen als Lösung haben.

$2x + 7 = 14x - 3$	☐
$-x + 12{,}5 = 2x + 0{,}5$	☒
$-7 + \frac{2x}{3} = 6 + \frac{1}{3}x$	☒
$\frac{x}{4} + 7 = -\frac{2}{3} - \frac{x}{6}$	☐
$4x - 1 = 0$	☐

402 Löse die Gleichung:

a) $\frac{5x - 1}{3} = \frac{7x - 4}{4}$ b) $\frac{11x - 3}{4} = \frac{8x - 1}{3}$

c) $\frac{14x - 1}{5} = \frac{19x - 121}{2}$ d) $\frac{x}{2} - \frac{x + 1}{5} = \frac{4x - 26}{4}$

403 Äquivalenzumformungen führen auf lineare Gleichungen. Löse die Gleichung!

a) $(5 - 2x)(5x - 1) = (7 - x)(10x + 9)$

b) $(3 + 2x)(4 - 5x) = (6 + x)(19 - 10x)$

c) $(3 + 4x)(4 - 10x) = -2x(3 + 20x)$

d) $(6x - 1)(9 + 15x) = (1 + 3x)(7 + 30x)$

e) $(-2x - 2)^2 - 2x(x + 1) = 2x(x + 1)$

f) $(2 - x)^2 + 3x(x + 1) = (2x + 1)^2$

404 Diese Gleichungen haben keine Lösung, oder unendlich viele Lösungen. Löse die Gleichung!

a) $2(4x + 1) - 2(3x + 4) = 2(x - 3)$

b) $\frac{1}{6}(4 - 10x) - \frac{1}{3}(x + 2) = -2(x + 3)$

c) $\frac{1}{6}(14x - 32) - \frac{1}{3}(x + 2) = 2(x - 3)$

d) $(x + 2)(6x + 15) = (2x + 5)(3x + 6)$

405 Ist die Gleichung linear? Begründe deine Entscheidung!

a) $3x = 4$ b) $2x \cdot 5y = -2$

c) $\frac{x}{2} - \frac{3y}{4} = \frac{1}{6}$ d) $12x - 4y - 9z = 24$

e) $-7x = -9$ f) $-2x - 3y = 11$

g) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{4}$ h) $3x^2 = 12$

406 Gegeben ist die Gleichung in zwei Variablen x und y: $\frac{2x}{3} + y = 2$. Diese Gleichung hat Wertepaare $(x|y)$ als Lösung. Kreuze alle Wertepaare an, die die Gleichung erfüllen.

$(2\|1)$	☐
$(-3\|4)$	☐
$(\frac{4}{3}\|1)$	☐

$(0\|2)$	☐
$(1\|\frac{4}{3})$	☐

407 Finde durch Probieren alle Wertepaare $(x|y)$ mit $x, y \in \mathbb{N}$, die Lösung der Gleichung sind.

a) $x + 2y = 6$ b) $2x + 2y = 4$

c) $x + 5y = 11$ d) $3x + 4y = 27$